

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$.

Για $h \neq 0$ έχουμε: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} = c \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Επομένως ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (c \frac{f(x+h)-f(x)}{h}) = cf'(x)$.

Άρα $(cf(x))'=cf'(x)$.

A2. Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός ορισμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 , συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται « f τονούμενο του x_0 ». Έχουμε λοιπόν $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

A3.

α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12$

B2

Από την υπόθεση δίνεται

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Άρα η f έχει τύπο $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$ και παράγωγο $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

B3

Η παράγωγος μηδενίζεται αν $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 + x - 2) = 0$

που έχει λύσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$

Το πρόσημο της παραγώγου και η μονοτονία της συνάρτησης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 1]$

Ακόμη παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$ το

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 10 = -16 + 12 + 24 + 10 = 30$$

και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ το

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 = 3$$

B4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x^2 + x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = 6 \cdot (1+2) = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Κλάσεις	Κεντρική τιμή	Συχνότητα	x_i, v_i
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)		v_3	
[20,24)		5	
	ΣΥΝΟΛΟ		

Γ1. Το πλάτος των κλάσεων είναι $x = 12 - 8 = 4$

Οι κεντρικές τιμές που λείπουν είναι $x_3 = x_2 + c = 14 + 4 = 18$ και $x_4 = x_3 + c = 18 + 4 = 22$

Επομένως



$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\frac{200 + 210 + v_3 \cdot 18 + 5 \cdot 22}{20 + 15 + v_3 + 5} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\frac{520 + 18v_3}{40 + v_3} = 14 \Leftrightarrow$$

$$520 + 18v_3 = 14 \cdot 40 + 14v_3 \Leftrightarrow$$

$$520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Leftrightarrow$$

$$4v_3 = 40$$

$$v_3 = 10$$

Γ2. Το πλήθος είναι $v = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$

Κλάσεις	Κεντρική τιμή	Συχνότητα	x_i, v_i
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	5	110
	ΣΥΝΟΛΟ	50	700

Γ3.

Κλάσεις	Κεντρική τιμή	Συχνότητα	x_i, v_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[8,12)	10	20	200	16	320
[12,16)	14	15	210	0	0
[16,20)	18	10	180	16	160
[20,24)	22	5	110	64	320
	ΣΥΝΟΛΟ	50	700	96	800

$$\text{Επομένως } s^2 = \frac{800}{50} = 16$$



β' τρόπος

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{v} \left[\sum v_i x_i^2 - \frac{(\sum v_i x_i)^2}{v} \right] = \\ &= \frac{1}{v} \sum v_i x_i^2 - \frac{(\sum v_i x_i)^2}{v^2} = \\ &= \frac{1}{v} \sum v_i x_i^2 - \left(\frac{\sum v_i x_i}{v} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{v} \sum v_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \end{aligned}$$

Κλάσεις	Κεντρική τιμή	Συχνότητα	x_i, v_i	$x_i^2 v_i$
[8,12)	10	20	200	2000
[12,16)	14	15	210	2940
[16,20)	18	10	180	3240
[20,24)	22	5	110	2420
	ΣΥΝΟΛΟ	50	700	10600

$$\text{Είναι } s^2 = \frac{10600}{50} - (14)^2 = 212 - 196 = 16$$

$$\text{Άρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$$

Γ4. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{16} = 4$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} > 0,1$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \frac{2}{x^3}$

άρα η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Δ2. Για κάθε x που ανήκει στο διάστημα $[-4, -1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα $-4 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M θα είναι $y = f'(1)x + \beta$

$f'(1) = 2$ άρα έχω ότι $y = 2x + \beta$ και αφού διέρχεται από το σημείο $(1, f(1))$ δηλαδή από το σημείο $(1, -1)$, θα ισχύει $-1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$.

Άρα η εφαπτομένη γίνεται $y = 2x - 3$

Δ4. Ισχύει ότι $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ και $s_y = 2 \cdot 2 = 4$

$CV = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\%$

Επιμέλεια:

Πασχάλης Νίκας, Βανούσης Χρίστος, Νικηφόρος Μανώλης, Φορτούνη Μαρία-Ανδριάννα, Ελευθεράκης Παναγιώτης, Φούντος Χρήστος

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Παγκράτι Κέντρο, Νέο Ηράκλειο, Ηράκλειο Κρήτης, Θεσσαλονίκη Αμπελόκηποι